*) Пусть траектория материальной точки задана как y = y(x).
Тогда радиус кривизны R траектории в точке M(x; y) равен:

$$R = \frac{\left(1+\left(y'\right)^2\right)^{3/2}}{|y''|}$$

*) Кинематика вращающихся систем отсчёта.
Пусть даны: неподвижная СО; СО, вращающаяся с постоянным вектором угловой скорости $\vec{\omega}=const$ вокруг одной из своих осей («связанная со вращающимся телом»); материальная точка M.
Пусть $\vec{a}$ - ускорение точки M в неподвижной СО, $\vec{a}_o$ - ускорение вращающейся СО относительно неподвижной СО, $\vec{a}'$ - ускорение точки M во вращающейся СО, $\vec{r}'$ - радиус-вектор точки M во вращающейся СО, $\vec{v}'$ - скорость точки M во вращающейся СО.
Тогда: $\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_n + \vec{a}_к$, где $\vec{a}_n = \vec{a}_o + [\vec{\omega},[\vec{\omega},\vec{r}']]$ - **переносное ускорение**, $\vec{a}_к = 2[\vec{\omega},\vec{v}']$ - **кориолисово ускорение.** Пусть $\vec{r}_\perp'$ - составляющая $\vec{r}'$, перпендикулярная $\vec{\omega}$. Тогда $[\vec{\omega},[\vec{\omega},\vec{r}']] = -\omega^2 \vec{r}_\perp'$, и $\vec{a}_n = \vec{a}_o - \omega^2 \vec{r}_\perp'$. $-\omega^2 \vec{r}_\perp'$ - **центростремительное ускорение**.

1.) **Первый закон Ньютона:**
Существуют такие системы отсчёта, называемые инерциальными, относительно которых материальные точки, когда на них не действуют никакие силы (или действуют силы взаимно уравновешенные), находятся в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.
Второй закон Ньютона:
В инерциальной системе отсчета произведение массы материальной точки на ее ускорение равно векторной сумме действующих на точку сил. $m\vec{a} = \vec{F}$
Третий закон Ньютона:
Материальные точки взаимодействуют друг с другом с силами, имеющими одинаковую природу, направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, равными по модулю и противоположными по направлению. $\vec{F}_{2-1} = -\vec{F}_{1-2}$ Силы взаимодействия возникают лишь попарно.
Замечание:
Второй закон Ньютона теряет силу в двух случаях:
1.) Тела движутся со скоростями, близкими к скорости света.
2.) Тела очень малы и движутся в очень малой области пространства (например, электроны в атоме).

2.) **Масса** тела — это мера отклика тела на действие **силы**.
Сила — это мера действия на данное тело других тел.
Единица измерения **массы** в СИ: 1 **килограмм** == масса эталонного тела, представляющего собой цилиндр из сплава платины (90%) и иридия (10%), диаметра 39.17 мм и такой же высоты.
Единица измерения **силы** в СИ: 1 **Ньютон** == сила, вызывающая ускорение 1 м/с^2 у тела массой в 1 **килограмм**.
Чтобы измерить **массу** тела, подействуем на тело **эталонной силой**, измерим ускорение тела, найдём **массу** по формуле **m = F / a**.
Чтобы измерить **силу**, подействуем ею на тело **эталонной массы**, измерим ускорение тела, найдём **силу** по формуле **F = ma**.
Замечание: измерение массы нужно проводить при скоростях, много меньших скорости света.

3.) **Принцип относительности <u>Галилея</u>**:

Никакими механическими опытами, проведёнными внутри данной системы отсчёта, нельзя установить, находится ли данная система в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.

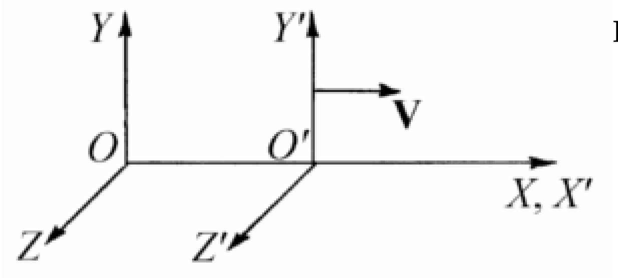
Математическая формулировка принципа относительности Галилея:
Уравнения, выражающие законы механики, должны быть инвариантны относительно преобразований, описывающий переход от неподвижной системы отсчёта к системе отсчёта, движущейся прямолинейно и равномерно. (преобразований Галилея)

Принцип относительности Эйнштейна:
Никакими физическими опытами, проведёнными внутри данной системы отсчёта, нельзя установить, находится ли данная система в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.

Математическая формулировка принципа относительности Эйнштейна:
Уравнения, выражающие физические законы, должны быть инвариантны относительно преобразований Лоренца.

Принцип постоянства скорости света:
Скорость света не зависит от того, по отношению к какой системе отсчета - покоящейся или движущейся - она определяется.

Преобразования:



Галилея:

$$x = x' + vt$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$
$$t = t'$$

Лоренца:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}$$
$$y = y'$$
$$z = z'$$
$$t = \frac{t' + x'V / c^2}{\sqrt{1 - V^2 / c^2}}$$

4.) **Преобразования Лоренца:** см. выше.

Релятивистское уравнение движения:

$\dot{\vec{p}} = \vec{F}$, где $\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}}$ - релятивистский импульс частицы, $\vec{v}$ - её скорость, m — её масса, $\vec{F}$ - сумма внешних сил, действующих на точку.

5.) **Закон всемирного тяготения:**
Любые две частицы притягиваются друг к другу с силой, пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними: $F \sim \frac{m_1 m_2}{r^2}$

В точности: $F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, где\ G \approx 6.6*10^{-11}\frac{Н*м^2}{кг^2} - гравитационная\ постоянная$

Принцип суперпозиции:
Каждая пара частиц взаимодействует независимо (как если бы других частиц не было).

6.) **Элементарная работа —** это скалярное произведение силы и бесконечно малого перемещения точки приложения этой силы: $dA = (\vec{F}, d\vec{r}) = \vec{F} d\vec{r}$

Работа — это сумма элементарных работ: $A = \int dA = \int \vec{F} d\vec{r}$, $[Н*м = Джоуль]$

Один **Джоуль** — работа, которую совершает сила в один Ньютон при перемещении точки приложения силы на один метр в направлении действия силы.

Потенциальная сила — сила, работа которой равна нулю при перемещении точки приложения силы по любому замкнутому контуру.

Примеры **потенциальных** сил: сила тяжести, сила упругости, сила Кулона.

Пример **непотенциальной** силы: сила трения.
Элементарная потенциальная энергия — это элементарная работа <u>потенциальной</u> силы, взятая со знаком «минус». $d\Pi = -dA_n = -\vec{F}_n d\vec{r}$
Потенциальная энергия — это сумма элементарных потенциальных энергий.
$\Pi = \int d\Pi\,, [Дж]$ $\Pi = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}_n d\vec{r} = \Pi(\vec{r}_0, \vec{r})$ $\leftarrow$ не зависит от траектории.

7.) По отношению к данной механической системе все силы делятся на внутренние и внешние. **Внутренними силами** называются силы взаимодействия между телами системы, **внешними** – силы, действующие на тела системы со стороны тел, **не входящих** в данную систему. Примеры **внутренних** сил: сила тяготения, с которой тела системы действуют друг на друга; сила кулона в системе заряженных частиц. Примеры **внешних** сил: сила тяготения, действующая со стороны тела, не принадлежащего системе; сила нормального давления со стороны поверхности, на которой лежит твёрдое тело (система частиц — твёрдое тело).

8.) **Центр масс системы частиц** — это воображаемая точка, радиус-вектор которой определяется по формуле: $\vec{r}_c = \frac{1}{m}\sum_i m_i \vec{r}_i$, где суммирование ведётся по всем точкам системы, m — полная масса системы. **Закон движения центра масс:** центр масс системы частиц движется так, как двигалась бы материальная точка, масса которой равна массе системы, если бы к этой точке были приложены все внешние силы.

9.) **Закон сохранения импульса:** если сумма внешних сил, действующих на механическую систему, равна нулю, то импульс системы сохраняется. **Закон сохранения импульса относительно оси:** если существует ось, в проекции на которую сумма внешних сил, действующих на механическую систему, равна нулю, то в направлении этой оси импульс системы сохраняется. **Закон сохранения полной механической энергии:** если работа <u>непотенциальных</u> сил, действующих на механическую систему, равна нулю, то <u>полная механическая энергия</u> системы сохраняется. **Закон сохранения энергии в теории относительности:** если сумма <u>внешних</u> сил, действующих на систему, равна нулю, то <u>релятивистская</u> энергия системы сохраняется: $E = \sum_i \frac{m_i c^2}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = const$ При том же условии **сохраняется релятивистский импульс** системы: $\vec{p} = \sum_i \frac{m_i \vec{v}_i}{\sqrt{1 - v_i^2/c^2}} = \vec{const}$

10.) **Момент импульса** материальной точки — это векторное произведение радиус-вектора материальной точки и её импульса. $\vec{N} = [\vec{r}\,, m\vec{v}]$
Момент импульса системы частиц определяется как сумма моментов импульса отдельных частиц системы. **Момент силы** — это векторное произведение радиус-вектора точки приложения силы и вектора силы. $\vec{M} = [\vec{r}\,, \vec{F}]$
Момент относительно оси — это проекция вектора момента на эту ось.
Теорема моментов для <u>материальной точки</u>: скорость изменения момента импульса материальной точки равна сумме моментов действующих на неё сил. $\dot{\vec{N}} = \vec{M}$
Теорема моментов для <u>системы частиц:</u> скорость изменения момента импульса системы частиц равна сумме моментов <u>внешних</u> сил, действующих на систему: $\dot{\vec{N}} = \vec{M}_{внеш}$
Закон сохранения момента импульса (для системы частиц): если сумма моментов внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то момент импульса системы сохраняется.

Закон сохранения момента импульса относительно оси: если существует ось, относительно которой сумма моментов внешних сил, действующих на систему, равна нулю, то относительно этой оси момент импульса системы сохраняется.

11.) Пусть выбрана неподвижная ось. Тогда **моментом инерции твёрдого тела <u>относительно данной оси</u>** называется величина $J=\sum_i m_i r_{i\perp}{}^2$, где суммирование ведётся по частицам тела, m_i - масса частицы, $r_{i\perp}$ - расстояние от частицы до оси. **Примеры:** Момент инерции цилиндра массы m и радиуса r относительно оси цилиндра: $J=\frac{mr^2}{2}$, момент инерции прямого тонкого стержня длины l и массы m относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через: а.) центр масс: $J=\frac{ml^2}{12}$ б.) конец стержня: $J=\frac{ml^2}{3}$, момент инерции шара радиуса r и массы m относительно оси, проходящей через его центр: $J=\frac{2}{5}mr^2$

Теорема Гюйгенса-Штейнера: момент инерции тела относительно произвольной неподвижной оси равен сумме момента инерции этого тела относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями: $J=J_c+ma^2$

12.) **Плоское движение твёрдого тела:**

$$\vec{p}=m\vec{v}_c$$
$$K=\frac{mv_c^2}{2}+\frac{J_c\omega^2}{2}$$
$$\vec{N}=[\vec{r}_c,m\vec{v}_c]+\sum_i[\vec{r}_{ic},m_i\vec{v}_{ic}]$$
$$\vec{N}_{\|}=[\vec{r}_{c\perp},m\vec{v}_c]+J_c\vec{\omega}$$
$$M_z=J\varepsilon_z-\text{уравнение вращения}$$

, где

$\vec{v}_c,\vec{r}_c$ – скорость и радиус-вектор центра масс
J_c – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс
$\vec{v}_{ic},\vec{r}_{ic}$ – скорость и радиус-вектор i-ой частицы относительно центра масс
$\vec{N}_{\|}$ – составляющая момента импульса, параллельная оси, проходящй через центр масс
$\vec{r}_{c\perp}$ – составляющая радиус-вектора ц.м, перпендикулярная оси, проходящей через ц.м
M_z – сумма моментов внешних сил относительно выбранной оси z
$\varepsilon_z=\dot{\omega}_z=\ddot{\varphi}$

13.) **Сила инерции** — это добавочная сила, действующая на материальную точку в неинерциальной системе отсчёта, и определяемая формулой:

$\vec{F}_{ин}=-m(\vec{a}-\vec{a}\,')$, где $\vec{a}$ – ускорение точки относительно инерциальной системы отсчёта, $\vec{a}\,'$ – ускорение точки относительно данной неинерциальной системы отсчёта

Силы инерции: $\vec{F}_{ин}=\vec{F}_п+\vec{F}_ц+\vec{F}_к$

$\vec{F}_п=-m\vec{a}_o$ – переносная сила
$\vec{F}_ц=m\omega^2\vec{r}_\perp{}'$ – центробежная сила
$\vec{F}_к=-2m[\vec{\omega},\vec{v}\,']$ – кориолисова сила

где

$\vec{a}_o$ – ускорение неинерциальной с.о относительно инерциальной с.о
$\vec{\omega}$ – вектор угловой скорости неинерциальной с.о
$\vec{r}_\perp{}'$ – составляющая радиус-вектора точки в неинерц. с.о, перпендикулярная оси вращения
$\vec{v}\,'$ – скорость точки в неинерциальной с.о

Примеры: невесомость и перегрузка — соответственно, исчезновение и увеличение веса тела, вызванные ускорением системы отсчёта (действует переносная сила);
центрифуга — быстро вращающееся тело испытывает действие центробежной силы;

14.) **Связи в механике —** не вытекающие из уравнений движения ограничения на координаты, скорости, ускорения точек механической системы.
Уравнения связей — соотношения между координатами, скоростями, ускорениями точек системы, математически выражающие связи.
Голономные связи — связи, сводящиеся к ограничениям только на координаты тел. (пример **не**голономной связи: качение шара без проскальзывания. Для скорости центра справедливо: $\vec{v}=[\vec{\omega},\vec{r}]$, где $\vec{r}$ - вектор, идущий из точки касания в центр шара. Это уравнение нельзя проинтегрировать по времени и получить ограничения на координаты, т. к. не гарантировано плоское движение).
Стационарные связи — связи, уравнения которых не содержат времени в явном виде. (пример **не**стационарной связи — математический маятник с длиной нити, зависящей от времени).
Примеры систем со связями: математический маятник с длиной нити l.
Пусть начало отсчёта — в точке подвеса. Тогда $x^2+y^2=l^2$;
Точка, движущаяся по плоскости в пространстве: координата **z** точки связана с координатами **x** и **y** уравнением плоскости; Качение цилиндра без проскальзывания: перемещение центра цилиндра связано с углом поворота: $x=R\varphi$
Примеры систем без связей: пружинный маятник (пружина — не связь!), свободно падающее тело.
Силы делятся на два **вида**:
1.) **Заданные** силы (F) — известные постоянные или известные функции координат (скоростей, ускорений) частиц. Примеры: сила тяжести, сила упругости.
2.) Силы **реакции (**R**)** — силы, действующие на тела системы со стороны тел, реализующих связи. Примеры: сила нормального давления, сила натяжения нити, сила трения

15.) **Число степеней свободы системы** (S) — это число независимых координат, полностью определяющих положение системы в пространстве.
Примеры: для системы, состоящей из **N** отдельных материальных точек $S=3N-k$, где k — число связей. Для твёрдого тела (достаточно рассмотреть каркас в виде треугольника) $N=3,\ k=3,\ S=6$.
Обобщённые координаты — это любые S координат, полностью описывающих положение системы в пространстве. Обозначение: $q_1,\dots,q_s$
Свойства обобщённых координат:
1. Радиус-векторы точек системы являются однозначными функциями набора обобщённых координат (быть может, ещё и времени, если в системе есть нестационарные связи).
2. Обобщённые координаты обращают в тождества уравнения связей.

16.) **Виртуальные перемещения** — это бесконечно малые перемещения, допускаемые связями в данный момент времени. Для точки с радиус-вектором $\vec{r}_l$:
$\delta\vec{r}_l=\sum_{j=1}^{S}\frac{\partial\vec{r}_l}{\partial q_j}\delta q_j$, где $\delta q_j=dq_j$ Символ δ действует, как обычный дифференциал по отношению к обобщённым координатам, но не ко времени.
Виртуальная работа — это работа силы на виртуальном перемещении. $\delta A=\vec{F}\delta\vec{r}$
Идеальные связи — связи, для которых виртуальная работа сил реакции равна нулю:
$\delta A_R=\sum_{l=1}^{N}\vec{R}_l\delta\vec{r}_l=0$, где $\vec{R}_l-$ сумма сил реакции, действующих на l-ую точку системы

Примеры идеальных связей: точка на идеально гладкой плоскости. Сила реакции — сила нормального давления — действует перпендикулярно плоскости, виртуальное перемещение лежит в плоскости, скалярное произведение равно нулю;
Качение без проскальзывания: рассмотрим точку тела, соприкасающуюся с плоскостью. Для этой точки виртуальное перемещение равно нулю, т. к. нет проскальзывания (связи не допускают её перемещения). Следовательно, виртуальная работа сил реакции равна нулю и скалярное произведение равно нулю.
Внутренние связи в абсолютно твёрдом теле, обеспечивающие постоянство расстояний между текущими положениями точек тела.

17.) **Лагранжианом механической системы** называется разность её кинетической и потенциальной энергий, выраженная через обобщённые координаты, обобщённые скорости и время. $L = K - \Pi = L(q, \dot{q}, t)$
Уравнения Лагранжа (записываются для механической системы, подчинённой идеальным голономным связям): $\frac{d}{dt}(\frac{\partial K}{\partial \dot{q}_j}) - \frac{\partial K}{\partial q_j} = Q_j,\ где\ Q_j = \sum_{l=1}^{N} \vec{F}_l \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j},\ j = 1,..,s$
$\vec{F}_l -$ сумма заданных сил, действующих на l-ую точку системы
$\vec{r}_l = \vec{r}_l(q, t) -$ радиус-вектор l-ой точки системы, где q - совокупность обобщённых координат
Если все <u>заданные</u> силы, действующие на механическую систему, **потенциальные**, то **уравнения Лагранжа** можно записать через **Лагранжиан:** $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0,\ j = 1,..,s$
Символом $\frac{d}{dt}$ обозначается <u>полная</u> производная по времени, символом $\frac{\partial ...}{\partial ...}$ - <u>частная</u> производная. $\vec{r}_l$ может зависеть от времени в случае нестационарных связей.

18.) **Обобщённая сила** $\boldsymbol{Q_j}$, отвечающая обобщённой координате q_j , определяется как $Q_j = \sum_{l=1}^{N} \vec{F}_l \frac{\partial \vec{r}_l}{\partial q_j},\ j = 1,..s$ Её размерность равна $\frac{H*м}{[q_j]}$. Если размерность q_j - **метр**, то размерность Q_j - **Ньютон**, и тогда обобщённая сила имеет смысл **проекции силы** на некоторую ось. Если q_j - безразмерная величина (**угол**), то размерность Q_j - $H*м$, и обобщённая сила имеет смысл **момента силы относительно** некоторой оси.
Обобщённый импульс $\boldsymbol{p_j}$, отвечающий обобщённой координате q_j , определяется как $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ Размерность обобщённого импульса $[p_j] = \frac{H*м*c}{[q_j]}$. Если соответствующая обобщённая координата имеет размерность **метр**, то обобщённый импульс имеет размерность $кг*\frac{м}{c}$ и имеет смысл **проекции импульса** на некоторую ось. Если соответствующая обобщённая координата — **безразмерная**, то обобщённый импульс имеет размерность $кг*\frac{м}{c}*м$ и имеет смысл **момента импульса относительно** некоторой оси.

19.) **Гамильтониан механической системы** определяется как
$H = H(q, p, t) = \sum_{j=1}^{s} \dot{q}_j p_j - L$, где L — **Лагранжиан** этой системы.
Закон изменения Гамильтониана: $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$
Механическая система называется **консервативной**, если её **Гамильтониан** не зависит от времени явным образом $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$.

Гамильтониан консервативной системы — это сумма кинетической и потенциальной энергий системы, выраженная через канонические переменные (обобщённые координаты и обобщённые импульсы): $H = K + \Pi = H(q, p)$

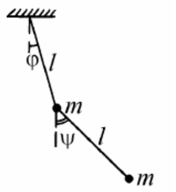
Уравнения Гамильтона: $\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j},\ \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j},\ j=1,..,s$

20.) **Уравнение гармонических колебаний:** $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, где **x** — отклонение обобщённой координаты колеблющегося тела относительно положения равновесия $x = q - q_0$

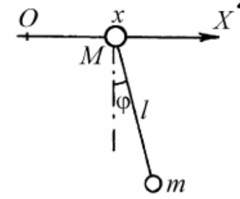
Общее решение уравнения гармонических колебаний: $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, где φ = const — начальная фаза колебания, A = const — амплитуда колебаний.

Чтобы **найти частоту малых колебаний механической системы ω**, нужно записать уравнение движения системы, после чего привести его к стандартному виду уравнения гармонических колебаний: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$. В силу предположения о малости колебаний можно, например, полагать $\sin\varphi \approx \varphi$, если колеблющаяся величина — угол. Кроме того, можно разложить **потенциальную** энергию в ряд Тейлора **вблизи положения равновесия**, при этом первый член разложения можно отбросить, т. к. потенциальная энергия определяется с точностью до константы, второй член разложения обращается в ноль в положении **равновесия**. Потенциальная энергия будет приблизительно равна **третьему** члену разложения, зависящему от отклонения **квадратично**.

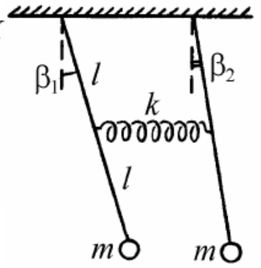
21.) **Примеры:**

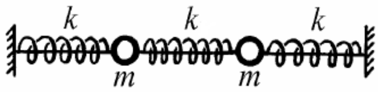


плоский двойной маятник



плоский математический маятник с перемещаемой точкой подвеса





Собственная частота колебательной системы — это частота свободных колебаний системы.
Нормальные колебания — это гармонические колебания на одной из собственных частот системы.
Нормальные координаты — это обобщённые координаты, которые при любых движениях системы меняются независимо друг от друга.
Рассмотрим систему с **четвёртой** иллюстрации. В качестве обобщённых координат возьмём отклонения шариков от их положений равновесия. Записав уравнения движения, мы увидим, что эти величины меняются **не независимо**, следовательно, их колебания не будут свободными. Если теперь сложить и вычесть полученные уравнения движения, получим новую пару уравнений, в каждой из которых можно сделать замену, так, что полученные уравнения будут **независимы**. Новые величины и будут **нормальными координатами.** Частоты их колебаний будут **собственными частотами** системы. Старые **обобщённые** координаты выражаются через **нормальные** координаты как их полусумма и полуразность.
Нормальными колебаниями будут колебания старых координат на собственных частотах. Отталкиваясь от вида выражения **старых** координат через **нормальные**, потребуем сначала, чтобы первая из норм. коорд. равнялась тождественно нулю, тогда обе старые координаты будут колебаться, как вторая норм. координата — получим **нормальные** колебания на второй из собственных частот. Потребовав, чтобы другая норм. координата равнялась тождественно нулю, получим **нормальные** колебания на первой из собственных частот.

22.) **Волновое уравнение** (как получено на лекциях для волны в натянутой струне)**:**
$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, где $v = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$, T — сила натяжения струны, ρ – линейная плотность струны.

Уравнение звуковой волны в воздухе (в прямой трубе)**:** $\frac{\partial^2 V_x}{\partial t^2} = c_o^2 \frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2}$, где V_x (судя по выводу этого уравнения на лекциях) – скорость **малого участка воздуха** под действием волны, $c_0 = const, c_0 \approx 300 \frac{м}{с}$ - скорость звуковой волны в воздухе.

23.) **Распределение плотности вероятности** для непрерывной случайной величины – это отношение вероятности попадания с.в. в малый интервал вблизи заданного значения к величине этого интервала, в пределе при стремлении величины интервала к нулю:
$\omega(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x_0 \le x \le x_0 + \Delta x)}{\Delta x} \ge 0$ Размерность распределения плотности вероятности обратна размерности соответствующей случайной величины.
Многомерное распределение плотности вероятности для нескольких непрерывных случайных величин – это отношение вероятности попадания нескольких с.в. в малые интервалы вблизи заданных значений к произведению величин этих интервалов, в пределе при стремлении величин интервалов к нулю:
$\omega(x_{0,} y_0) = \lim_{\Delta x, \Delta y \to 0} \frac{P(x_0 \le x \le x_0 + \Delta x, \ y_0 \le y \le y_0 + \Delta y)}{\Delta x \Delta y} \ge 0$ Размерность многомерного распределения плотности вероятности обратна произведению размерностей соответствующих с.в.
Условие нормировки: интеграл (многомерного) распределения плотности вероятности по всем допустимым значениям случайной величины (случайных величин) равен единице.
Понижение порядка распределения: $\omega_1(x) = \int \omega(x, y) dy, \ \omega_2(y) = \int \omega(x, y) dx$
Для независимых с.в: $\omega(x, y) = \omega_1(x) \omega_2(y)$
Правило вычисления средних:
$$\overline{f(x)} = \int f(x) \omega(x) dx$$
$$\overline{f(x, y)} = \int \int f(x, y) \omega(x, y) dx\, dy$$
Термодинамическое равновесие – состояние, в котором система, предоставленная самой себе, может находиться сколь угодно долго.
Основной закон статистической механики равновесных систем: в состоянии термодинамического равновесия распределение плотности вероятности для различных состояний системы описывается формулой **Гиббса**.
Распределение Гиббса: $\omega(z) = c e^{-H(z)/kT}$, где z – совокупность **канонических** переменных (обобщённых координат и обобщённых импульсов) системы, H = K + П = H(q, p) – **Гамильтониан** системы, $k = 1{,}38 * 10^{-23} \frac{Джоуль}{градус}$ - постоянная **Больцмана**, T – <u>абсолютная</u> температура системы, $T = t + 273^\circ C$, c – нормировочная постоянная (из условия нормировки).
Температура – то, что измеряется термометром. Единица измерения температуры – градус Цельсия $1^\circ C$, определяется как одна сотая интервала между температурой плавления льда и температурой кипения воды при нормальных условиях ($p = 10^5 Па$).

24.) **Распределение Максвелла (распределение молекул по скоростям):**

$\omega(v_x, v_y, v_z) = ce^{-m(v_x^2+v_y^2+v_z^2)/2kT}$, m — масса молекулы; v_x, v_y, v_z — проекции её скорости

Распределение Больцмана (распределение частиц в потенциальном силовом поле):

$\omega(x, y, z) = ce^{-\Pi(x,y,z)/kT}$

Нормировочная постоянная для распределения Максвелла:

$$c = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}$$

25.) **Теорема о равнораспределении энергии по степеням свободы:** в состоянии термодинамического равновесия на каждую квадратичную степень свободы приходится в среднем одинаковая энергия, равная $E = \frac{kT}{2}$

Квадратичная степень свободы – это каноническая переменная, вклад которой в **Гамильтониан** пропорционален квадрату этой переменной.

Пусть z – совокупность канонических переменных, z_1 - квадратичная степень свободы, z' - совокупность всех остальных канонических переменных. Тогда это условие означает, что $H(z) = az_1^2 + H'(z')$, где $a = a(z')$

В этих обозначениях формулировка **теоремы** означает, что $\overline{az_1^2} = \frac{kT}{2}$.

26.) **Диффузия** – это проникновение одного вещества в другое. Вызывается тепловым движением.

Закон диффузии: плотность потока частиц пропорциональна градиенту их концентрации. Мы рассматриваем случай, когда концентрация зависит только от одной координаты: $n = n(x)$. Тогда **закон диффузии** принимает следующий вид: $\frac{\Delta N_x}{S\Delta t} = -D\frac{\partial n}{\partial x}$, где ΔN_x - число частиц, прошедших в направлении оси x через «проём» площади S за время Δt , D — **коэффициент диффузии**. $[D] = [\frac{м^2}{с}]$

Величина, стоящая в левой части равенства, называется плотностью потока частиц.

Физический смысл коэффициента диффузии — скорость «расплывания» диффузионного пятна. Формально **коэффициент диффузии** определяется как коэффициент пропорциональности между плотностью потока частиц и градиентом их концентрации.

Уравнение диффузии: $\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$, $n = n(x,t)$

Теплопроводность — это процесс переноса тепла в неоднородно нагретом теле.

Закон теплопроводности: плотность потока тепла пропорциональна градиенту температуры. Пусть температура зависит только от одной координаты: $T = T(x)$.

Закон теплопроводности принимает следующий вид: $\frac{\Delta Q_x}{S\Delta t} = -\varkappa\frac{\partial T}{\partial x}$, где ϰ (каппа) — **коэффициент теплопроводности**, ΔQ_x - количество тепла, прошедшего через «проём» площади S за время Δt. Величина, стоящая в левой части равенства, называется плотностью потока тепла. **Коэффициент теплопроводности ϰ** определяется как коэффициент пропорциональности между плотностью потока тепла и градиентом температуры.

$[\varkappa] = [\frac{Вт}{м*град}]$.

Теплота — это энергия, переданная без совершения работы.

Уравнение теплопроводности: $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\varkappa}{c\rho}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$, $T = T(x,t)$, где с — удельная теплоёмкость вещества, ρ — его плотность.

Из этих законов можно сделать два **вывода**: Тепло идёт в направлении убыли температуры; Поток частиц идёт в направлении убыли их концентрации.